Arrangements d'hyperplans

Pauline Bailet

Université Nice Sophia Antipolis

Soutenance de Thèse
Dirigée par Alexandru Dimca
11 juin 2014

- P. Bailet : On the monodromy of Milnor fibers of hyperplane arrangements, arXiv :1401.6042
- P. Bailet, M. Yoshinaga : Degeneration of Orlik-Solomon algebras and Milnor fibers of complex line arrangements, arXiv :1312.1771

Les objets

Un **arrangement d'hyperplans** $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est un ensemble fini d'hyperplans $H_i \subset \mathbb{C}^{n+1}$:

$$\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est **central** si $0 \in \cap_{j=1}^{d} H_j$

On dit que $\mathcal{A}$ est **essentiel** si $\cap_{j=1}^{d} H_j = \{0\}$

L'union des hyperplans de $\mathcal{A}$ est définie par un polynôme :

$$Q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \prod_{j=1}^{d} l_j(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0,$$

où $H_j = \{l_j = 0\}$.

Lorsque $\mathcal{A}$ est central, Q est homogène (de degré d) et on peut considérer **l'arrangement projectif** :

$$\mathcal{A}' = \{H_1', \ldots, H_d'\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}.$$

On note

$$M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{d} H_j, \quad M(\mathcal{A}') = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^{d} H'_j,$$

les complémentaires de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

On note

$$L(\mathcal{A}) = \{X = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k} \,|\, X \neq \emptyset\}$$

le **treillis d'intersection** de $\mathcal{A}$ ordonné par inclusion inverse, et

$$L_q(\mathcal{A}) = \{X \in L(\mathcal{A}) \,|\, codim(X) = q\}.$$

Pour $X \in L(\mathcal{A})$, on note

$$\mathcal{A}_X = \{H_i \in \mathcal{A} \mid X \subset H_i\}.$$

Soit R un anneau commutatif unitaire.

On note $A_R^*(\mathcal{A})$ **l'algèbre d'Orlik-Solomon** de $\mathcal{A}$,
et $a_i \in A_R^1(\mathcal{A})$ le générateur correspondant à l'hyperplan H_i.

Soient $\omega_1 = \sum_{i=1}^{d} a_i \in A_R^1(\mathcal{A})$, et

$$(A_R^*(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge) = \{ \ A_R^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\omega_1 \wedge} A_R^{*+1}(\mathcal{A}) \ \}_{* \geq 0}$$

le **complexe d'Aomoto**.

Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ **central**.

On appelle **fibre de Milnor** de l'arrangement $\mathcal{A}$, l'hypersurface affine lisse définie par :

$$F = Q^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Soit $\lambda = exp(2i\pi/d)$, $d = |\mathcal{A}|$. La **monodromie** sur F est :

$$\begin{aligned} h : \ & F \to F \\ & x \mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

On note

$$h^q : H^q(F, \mathbb{C}) \to H^q(F, \mathbb{C}), \, \forall q \geq 0,$$

les **operateurs de monodromie**.

La problématique

Théorème (Orlik, Solomon, 1980)

$$A_R^*(\mathcal{A}) \simeq H^*(M(\mathcal{A}), R).$$

$\Rightarrow H^*(M(\mathcal{A}), R)$ est complètement déterminé par $L(\mathcal{A})$.

Théorème (Orlik, Solomon, 1980)

$$A_R^*(\mathcal{A}) \simeq H^*(M(\mathcal{A}), R).$$

$\Rightarrow H^*(M(\mathcal{A}), R)$ est complètement déterminé par $L(\mathcal{A})$.

QUESTION OUVERTE (pour $n \geq 2$) :

$$L(\mathcal{A}) \Rightarrow h^* \ ?$$

$$L(\mathcal{A}) \Rightarrow b_q(F) = dim\, H^q(F, \mathbb{C}),\ 0 \leq q \leq n \ ?$$

Les opérateurs de monodromie

$$h^q : H^q(F, \mathbb{C}) \to H^q(F, \mathbb{C})$$

sont diagonalisables, à valeur propres dans

$$\mu_d = \{\lambda^k, 0 \leq k \leq d-1\}.$$

On a la décomposition en sous-espaces propres :

$$H^q(F, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^q(F)_{\lambda^k},$$

où $H^q(F)_{\lambda^k} = \ker(h^q - \lambda^k \cdot Id)$.

On a

$$H^q(F,\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^q(M(\mathcal{A}'),\mathcal{L}'_{\lambda^k}),$$

où $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ est le système local de rang 1 sur $M(\mathcal{A}')$ tel que la monodromie autour de chaque hyperplan de $\mathcal{A}'$ est λ^k.

On va s'intéresser à $q = 1$:

$$H^1(F, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^1(F)_{\lambda^k}.$$

Pour la valeur propre 1 :

$$H^1(F)_1 = H^1(M(\mathcal{A}'), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{d-1}$$

est déterminé par $L(\mathcal{A})$.

Pour les autres valeurs propres, c'est plus compliqué.

Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ central de fibre de Milnor F.

Définition

Le graphe $G(\mathcal{A})$ d'un arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est donné par :

- *Les sommets de $G(\mathcal{A})$ sont les hyperplans $H_i \in \mathcal{A}$.*
- *Deux sommets distincts H_i et H_j sont reliés par une arête si et seulement si $|\mathcal{A}_X| = 2,$ où $X = H_i \cap H_j$.*

*$G(\mathcal{A})$ est **connexe** si pour tous sommets $H_i, H_j \in \mathcal{A}$, il existe une suite d'arêtes reliant H_i et H_j.*

Exemples

L'arrangement des tresses $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$:

$$H_{ij} = \{x_i - x_j = 0\},\ 1 \leq i < j \leq n+1.$$

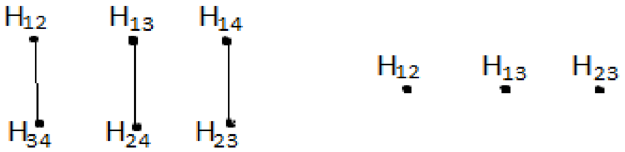


Figure: Les graphes $G(\mathcal{A}_3)$ et $G(\mathcal{A}_2)$

Exemples

L'arrangement des tresses $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$:

$$H_{ij} = \{x_i - x_j = 0\},\ 1 \leq i < j \leq n+1.$$

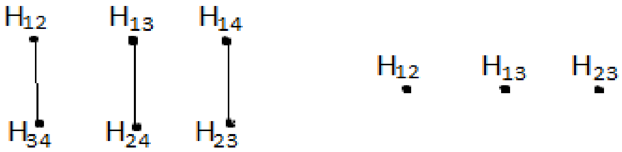


Figure: Les graphes $G(\mathcal{A}_3)$ et $G(\mathcal{A}_2)$

$G(\mathcal{A}_n)$ est connexe pour tout $n \geq 4$.

Théorème (2)

Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *central de fibre de Milnor* F.
Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $X \in L_2(\mathcal{A})$, *on a* $|\mathcal{A}_X| \leq 9$.

(ii) Soit d *n'est pas un multiple de* 6,
soit il existe un hyperplan $H \in \mathcal{A}$ *tel que :*

si $X \in L(\mathcal{A})$ *vérifie* $\operatorname{codim} X = 2$ *et* $X \subset H$, *alors* $|\mathcal{A}_X| \neq 6$.

(iii) Le graphe $G(\mathcal{A})$ *est connexe.*

Alors $H^1(F, \mathbb{C}) = H^1(F)_1$.

Exemple

Soit $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ l'arrangement des tresses. Alors

$$H^1(F_{\mathcal{A}_n}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}_n})_1, \forall n \geq 4.$$

Eliminer des valeurs propres en utilisant un résultat d'annulation de la cohomologie tordue dû à Cohen, Dimca, Orlik.

Eliminer des valeurs propres en utilisant un résultat d'annulation de la cohomologie tordue dû à Cohen, Dimca, Orlik.

Théorème (Papadima, Suciu, 2010)

Si $ord(\lambda^k) = p^s$, $s \geq 1$, p premier, alors :

$$dim\, H^1(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}) \leq dim_{\mathbb{F}_p} H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}'), \omega'_1 \wedge).$$

Eliminer des valeurs propres en utilisant un résultat d'annulation de la cohomologie tordue dû à Cohen, Dimca, Orlik.

Théorème (Papadima, Suciu, 2010)

Si $ord(\lambda^k) = p^s$, $s \geq 1$, p *premier, alors :*

$$\dim H^1(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}'), \omega'_1 \wedge).$$

Lemme (1)

Si $G(\mathcal{A})$ *est connexe, alors* $H^1(A^*_R(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge) = 0$, *pour tout anneau commutatif unitaire* R.

Soit

$$\mathcal{A}' = \{H'_1, \ldots, H'_d\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

un arrangement constitué de d hyperplans, de complémentaire

$$M(\mathcal{A}') = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^{d} H'_j,$$

de fibre de Milnor

$$F \subset \mathbb{C}^3.$$

Soit $\lambda = exp(2i\pi/d)$. On considère la décomposition en sous-espaces propres :

$$H^1(F, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^1(F)_{\lambda^k}.$$

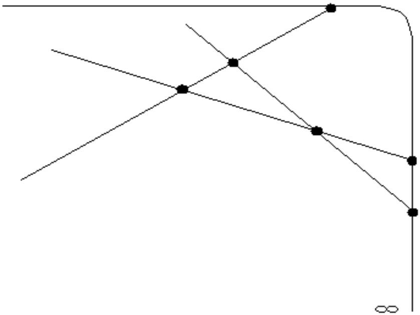
OBJECTIF : trouver des valeurs propre λ^k telles que

$$H^1(F)_{\lambda^k} = 0.$$

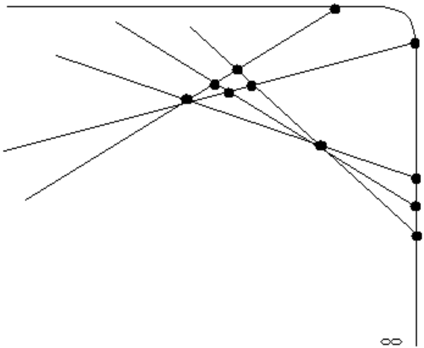
OBJECTIF : trouver des valeurs propre λ^k telles que

$$H^1(F)_{\lambda^k} = 0.$$

- (Orlik, Randell, Hattori)
  Si $\mathcal{A}'$ est générique, alors $H^1(F,\mathbb{C}) = H^1(F)_1$.



- (Libgober, 2002) Supposons qu'il existe un hyperplan $H'_i \in \mathcal{A}'$ ne contenant que des points doubles.
  Alors $H^1(F, \mathbb{C}) = H^1(F)_1$.



Définition

Soit $m > 1$ *un entier strictement supérieur à 1. Notons*

$$\mu(H'_i, m) = |\{P \in H'_i \mid m \text{ divise } |\mathcal{A}'_P|\}|,$$

$=$ *nombre de points sur* H'_i *de multiplicités divisibles par* m*.*

Définition

Soit $m > 1$ un entier strictement supérieur à 1. Notons

$$\mu(H_i', m) = |\{P \in H_i' \mid m \text{ divise } |\mathcal{A}_P'|\}|,$$

$=$ nombre de points sur H_i' de multiplicités divisibles par m.

- (Libgober, 2002) Soit $\lambda^k \neq 1$ une racine de l'unité d'ordre $m > 2$.
  Si $\mu(H_i', m) = 0$ pour un certain $H_i' \in \mathcal{A}'$, alors $H^1(F)_{\lambda^k} = 0$.

- (Yoshinaga, 2013) Supposons que les hyperplans de $\mathcal{A}'$ sont donnés par des equations linéaires à coefficients **réels**.
  Soit $\lambda^k \neq 1$ une racine de l'unité d'ordre $m > 1$.
  Si $\mu(H_i', m) \leq 1$ pour un certain $H_i' \in \mathcal{A}'$, alors $H^1(F)_{\lambda^k} = 0$.

Théorème (A)

Soit $p \in \mathbb{Z}$ *un nombre premier et* $m = p^s, \; s \geq 1, \;$ *tel que* $m|d$.
Soit $\lambda^k \neq 1$ *une racine de l'unité d'ordre* m.
Supposons $\mathcal{A}'$ *essentiel. Alors on a :*

$$\text{si } \mu(H'_i, p) \leq 1 \text{ pour un certain } H'_i \in \mathcal{A}', \text{ alors } H^1(F)_{\lambda^k} = 0.$$

Démonstration

On va supposer $\mu(H_1', p) \leq 1$.

On a un isomorphisme de variétés algébriques

$$\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \backslash H_1'.$$

On obtient un arrangement affine $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$,

$$M(\mathcal{B}) \simeq M(\mathcal{A}').$$

On a donc :

$$H^1(F)_{\lambda^k} \simeq H^1(M(\mathcal{B}), \mathcal{L}_{\lambda^k}).$$

Théorème (Papadima, Suciu)

Si $ord(\lambda^k) = p^s$, $s \geq 1$, *p premier, alors :*

$$dim\, H^1(M(\mathcal{B}), \mathcal{L}_{\lambda^k}) \leq dim_{\mathbb{F}_p} H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{B}), \omega_1 \wedge).$$

Théorème (Papadima, Suciu)

Si $ord(\lambda^k) = p^s$, $s \geq 1$, p *premier, alors :*

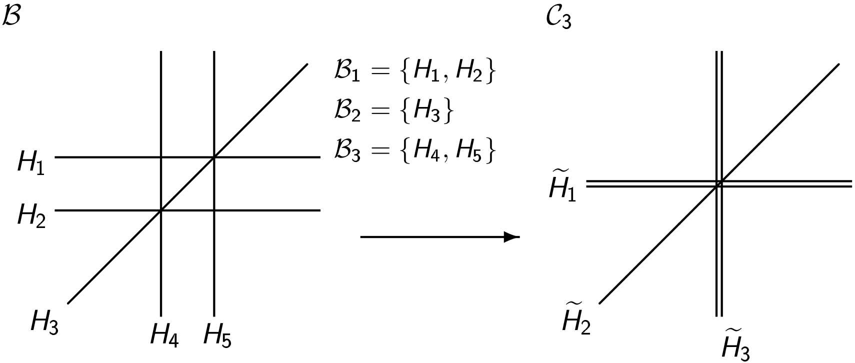
$$dim\, H^1(M(\mathcal{B}), \mathcal{L}_{\lambda^k}) \leq dim_{\mathbb{F}_p} H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{B}), \omega_1 \wedge).$$

Théorème (B)

Soit $p \in \mathbb{Z}$ *un nombre premier. Supposons* $\mathcal{A}'$ *essentiel. Alors on a :*

$$si\ \mu(H'_1, p) \leq 1, \text{ alors } H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{B}), \omega_1 \wedge) = 0.$$

Dégénérescence totale



Dégénérescence totale de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}_3$.

On partitionne $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$ en familles de droites parallèles :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_l.$$

Soit R un anneau commutatif unitaire.

On partitionne $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$ en familles de droites parallèles :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_l.$$

Soit R un anneau commutatif unitaire.

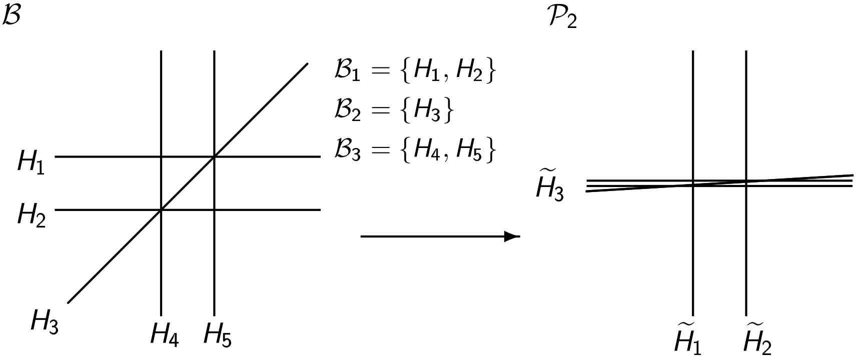
Théorème (C)

Il existe un homomorphisme de $R-$algèbres surjectif, appelé homomorphisme de dégénérescence totale :

$$\Delta_{tot} : A^*_R(\mathcal{B}) \longrightarrow A^*_R(\mathcal{C}_l),$$

où $\mathcal{C}_l$ est un arrangement central de l droites dans $\mathbb{C}^2$.

Dégénérescence directionnelle



Dégénérescence directionnelle de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{P}_2$ par rapport à $\mathcal{B}_3$.

Reprenons notre décomposition $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_l \subset \mathbb{C}^2$.

Fixons une classe $\mathcal{B}_\beta$.

Posons $v = |\mathcal{B}_\beta|$.

Reprenons notre décomposition $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_l \subset \mathbb{C}^2$.

Fixons une classe $\mathcal{B}_\beta$.

Posons $v = |\mathcal{B}_\beta|$.

Théorème (D)

Il existe un homomorphisme de $R-$algèbres surjectif, appelé dégénérescence directionnelle par rapport à la classe $\mathcal{B}_\beta$:

$$\Delta_{dir} : A_R^*(\mathcal{B}) \longrightarrow A_R^*(\mathcal{P}_v),$$

où $\mathcal{P}_v \subset \mathbb{C}^2$ est constitué de v droites parallèles, et d'une autre droite qui leur est transversale.

Préliminaires

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans central, $|\mathcal{A}| = d$, de fibre de Milnor

$$F \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Alors $H^q(F, \mathbb{Q})$ est une structure de Hodge mixte pour tout $q \geq 0$.

- $H^q(F, \mathbb{Q})$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension finie

- $H^q(F, \mathbb{Q})$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension finie
- Il existe une filtration, dite "filtration de Hodge", décroissante et finie

$$H^q(F, \mathbb{C}) = F^0 H^q(F, \mathbb{C}) \supset \cdots \supset F^{q+1} H^q(F, \mathbb{C}) = 0$$

- $H^q(F, \mathbb{Q})$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension finie
- Il existe une filtration, dite "filtration de Hodge", décroissante et finie

$$H^q(F, \mathbb{C}) = F^0 H^q(F, \mathbb{C}) \supset \cdots \supset F^{q+1} H^q(F, \mathbb{C}) = 0$$

- Il existe une filtration, dite "filtration par le poids", croissante et finie

$$0 \subset W_q H^q(F, \mathbb{Q}) \subset \cdots \subset W_{2q} H^q(F, \mathbb{Q}) = H^q(F, \mathbb{Q}),$$

telle que

$$Gr_k^W H^q(F, \mathbb{Q}) = W_k H^q(F, \mathbb{Q}) / W_{k-1} H^q(F, \mathbb{Q})$$

est une structure de Hodge pure de poids k pour tout k.

Il existe une filtration induite,

$$F^a Gr_k^W H^q(F, \mathbb{C})$$

et on note

$$H^{a,b}(H^q(F, \mathbb{C})) = Gr_F^a \, Gr_{a+b}^W \, H^q(F, \mathbb{C}),$$

et

$$h^{a,b}(H^q(F, \mathbb{C})) = dim_{\mathbb{C}} H^{a,b}(H^q(F, \mathbb{C}))$$

les nombres de Hodge mixtes.

Problématique

Soit Y une variété algébrique complexe. On s'interesse à la propriété suivante :

$$h^{a,b}(H^q(Y,\mathbb{C})) = 0 \quad \text{si } a \neq b,\ \forall q \qquad \text{(P)}$$

On dit que les $H^q(Y,\mathbb{C})$ sont des **structures de Hodge-Tate mixtes.**

Problématique

Soit Y une variété algébrique complexe. On s'interesse à la propriété suivante :

$$h^{a,b}(H^q(Y,\mathbb{C})) = 0 \quad \text{si } a \neq b, \ \forall q \qquad \text{(P)}$$

On dit que les $H^q(Y,\mathbb{C})$ sont des **structures de Hodge-Tate mixtes.**

QUESTION : est-ce que la fibre de Milnor F d'un arrangement central $\mathcal{A}$ vérifie (P) ?

$$h^{a,b}(H^q(Y,\mathbb{C})) = 0 \quad \text{si } a \neq b,\ \forall q \qquad\qquad \text{(P)}$$

- (P) vérifié si $Y = M(\mathcal{A})$ est le complémentaire d'un arrangement.

$$h^{a,b}(H^q(Y,\mathbb{C})) = 0 \quad \text{si } a \neq b,\ \forall q \qquad\qquad (\mathrm{P})$$

- (P) vérifié si $Y = M(\mathcal{A})$ est le complémentaire d'un arrangement.
- h^* trivial $\Rightarrow \quad H^*(F,\mathbb{C}) = H^*(F,\mathbb{C})_1 = H^*(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C})$ $\Rightarrow$ F vérifie (P).

QUESTION : F vérifie (P) $\Rightarrow$ h^* trivial ?

QUESTION : F vérifie (P) $\Rightarrow$ h^* trivial ?

- VRAI pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^2$ central.
- (Dimca, 2012) VRAI pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$ central et essentiel.
- (Dimca) Faux pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^8$.

QUESTION : F vérifie (P) $\Rightarrow$ h^* trivial ?

- VRAI pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^2$ central.
- (Dimca, 2012) VRAI pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$ central et essentiel.
- (Dimca) Faux pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^8$.

On propose d'étudier le cas $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ central.

On considère

$$Gr_F^a H^q(F, \mathbb{C}),$$

et l'application linéaire induite :

$$h^q : Gr_F^a H^q(F, \mathbb{C}) \to Gr_F^a H^q(F, \mathbb{C}),$$

à valeurs propres dans μ_d.

Soit $\beta \in \mu_d$. On note

$$Gr_F^a H^q(F, \mathbb{C})_\beta$$

le sous-espace propre associé la valeur propre β.

Définition

*Le **spectre** d'un arrangement central $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, de fibre de Milnor F, est le polynôme*

$$Sp(\mathcal{A}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} n_\alpha \ t^\alpha,$$

dont les coefficients sont donnés par :

$$n_\alpha = \sum_{q>0} (-1)^{q-n} \dim Gr_F^a H^q(F, \mathbb{C})_\beta,$$

où $\beta = exp(-2i\pi\alpha)$, et $a = \lfloor n+1-\alpha \rfloor$ est la partie entière de $n+1-\alpha$.

Théorème (Budur, Saito, 2009)

Le spectre $Sp(\mathcal{A})$ *d'un arrangement central* $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *est complètement déterminé par le treillis d'intersection* $L(\mathcal{A})$.

- On a des formules combinatoires pour calculer les coefficients n_α du spectre données par Budur et Saito pour un arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$ central et essentiel.

- De nouvelles formules ont été récemment obtenues (2014) pour un arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ central par Yoon.
  Ces formules nous permettent de démontrer le théorème suivant.

Théorème

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ un arrangement central et essentiel,
de fibre de Milnor F. Les hypothèses suivantes sont équivalentes :

(i) La monodromie h^* est triviale sur tous les groupes de cohomologie $H^*(F, \mathbb{C})$.

(ii) Les nombres de Hodge mixtes vérifient

$$h^{a,b}(H^q(F, \mathbb{C})) = 0, \ \forall a \neq b, \ \forall q \qquad (P)$$

(iii) Les coefficients du spectre n_α sont nuls pour tout $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Merci !